مقارنة طرائق مختلفة لتقدير معلمة القياس ودالة المعولية لتوزيع رايلي ذي المعلمتين مع تطبيق عملي

أ. م. د. أسيل سمير محمد
كلية طب الكندي / فرع طب المجتمع

المستخلص

من خلال متابعتنا لأحد منتوجات الشركة العامة للصناعات الإلكترونية وهي إحدى الشركات التابعة لوزارة الصناعة والمعادن، وهو منتوج أجهزة حماية الأجهزة الكهربائية ومتابعة خدمات المنتوج ما بعد البيع من قبل الشركة، وجدنا أن أوقات الاشتغال لحين الفشل لعينة عشوائية تتكون من (50) جهازاً، بعد رسم المنحني والمدرج التكراري أن الشكل يدل على توزيع رايلي لذلك تم العمل على هذا الأساس، وأجري اختبار حسن المطابقة وتم التأكد من أن التوزيع الملائم للبيانات هو توزيع رايلي بالمعلمتين (α, β) لذلك تركز العمل على تقدير معلمة القياس (β) لأن معلمة الموقع يمكن افتراضها أو الاستدلال عليها من البيانات. تم التركيز في هذا البحث على تقديم خمس طرائق مختلفة لتقدير معلمة القياس هي الإمكان الأعظم، طريقة العزوم ومقدرات بيز المعتمدة على المعلومات الأصلية المحورة ومقدر بيز الاعتيادي ومقدر مقترح يعتبر خليط من مقدري الإمكان الأعظم ومقدر بيز. أجريت المقارنة بواسطة المحاكاة وكررت كل تجربة (R=1000) وأستخدم معيار متوسط الخطأ التكاملي (Integrated Mean Square Error) والذي يرمز له (IMSE) كأساس في المقارنة، وبعد أن تم تقدير المعلمة (β) باعتبار أن (α) معلومة، قدرت دالة المعولية وهي احتمال بقاء الجهاز صالح للعمل بعد مرور الزمن (t)، ووضعت جميع النتائج في جداول خاصة.

Comparing different methods to estimate scale and Reliability function for two parameters Rayleigh dist with application

prof .assistance Aseel Sameer
Kindee college of medicin

Abstract:

Through our follow to a General company for Electronic Industries, which is a one company of the Ministry of Industry and Minerals, a product protection devices for electrical and follow-up services product after sales by the company, we found that the times to engage until the failure of a random sample of (50) device, after drawing the curve his to gram that figure indicates the distribution of Rielyh so been working on this basis, and conducted test goodness of fit was sure that the appropriate distribution of data is distributed Rielyh with two parameters (α, β) so work focused on estimating scale parameter (β) because shifting parameter can assumed from data. Been the focus ofthis researchto providefivedifferentmethodsto estimate thescaleparameterwhich are maximum likelihood method, moment method and Bayes estimator

depending on the original data. The comparison has been done through simulation and repeated the experiments (R=1000), using Integrated Mean Square Error as a base of comparison, after estimating we estimate reliability function, all results putting in tables.

المقدمة

يعتبر توزيع رايلي من التوزيعات الاحتمالية المستمرة، وذات التطبيقات الواسعة لمتغير الزمن المستغرق لحين حصول الفشل[1]، مثل زمن المكائن والمعدات، وعمر المريض الذي يعاني من مرض خطير، فهو يستخدم لتمثيل اوقات البقاء منذ زمن حصول المرض ولحين الوفاة، فاذا كان وقت الفشل يبدأ عند زمن معين وليكن α وليس من الصفر، عندئذ يمكن اعتماد توزيع رايلي ذي المعلمتين (α,β) لوصف مدة الضمان او المدة التي لا تحدث فيها مثلاً اعطال ابتدائية بالنسبة للمكائن. ولاهمية هذا التوزيع، سوف نتناول في هذا البحث خمس طرائق لتقدير معلمة القياس β، ومن ثم اعتماد هذا المقدرات في حساب المعولية لتوزيع رايلي، وان المقارنة بين الطرائق ستتم بواسطة المحاكاة وعددياً، والطرائق هي الامكان الاعظم، العزوم، طريقة بيز، طريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة، وطريقة مقترحة تمثل خليط من مقدري الامكان الاعظم وبيز، وسوف يعتمد متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) كاساس في المقارنة.

هدف البحث

يهدف البحث الى المقارنة بين خمسة مقدرات لتقدير معلمة القياس β لتوزيع رايلي ذي المعلمتين (معلمة الازاحة α، معلمة القياس β)، وسوف نعتبر α معلومة، اما β فسوف تقدر بطريقة الامكان الاعظم، العزوم، طريقة بيز، طريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة، وطريقة مقترحة تمثل خليط من مقدري الامكان الاعظم وبيز. والسبب في اعتبار α ثابتة فهي عامل مهم خاصة بالنسبة للتطبيقات الطبية والصناعية والدراسات السريرية، والتي يقوم بها الباحثون بعد مرور α من الزمن على البحوث الطبية سيما بالنسبة للمرضى المصابين بالسرطان[2] وغيرها من اختبارات الحياة التي تظهر فيها الاعراض واضحة بعد مرور مدة زمنية تسمى α، وسوف نعبر عنها بمعلمة الازاحة Shifting parameter. اما β فهي معلمة القياس والتي سيتم تقديرها عددياً بواسطة المحاكاة من خلال الطرائق الخمسة المشار اليها في اعلاه.

الجانب النظري[1,6]

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي ذي المعلمتين (α,β)، تأخذ الصيغة التالية:

$$f(t;\alpha,\beta)=\begin{cases} \dfrac{2(t-\alpha)}{\beta}\, e^{-\dfrac{(t-\alpha)^2}{\beta}} & \alpha<t<\infty;\ \beta>0 \\ 0 & o/w \end{cases} \qquad \ldots\ldots(1)$$

حيث α تمثل معلمة الازاحة، β معلمة القياس.

ودالة التوزيع الاحتمالية التراكمية $c.d.f$ فهي:

$$F(t,\alpha,\beta)=\Pr(T\le t)=\int_{\alpha}^{t} f(u)\,du=1-e^{-(t-\alpha)^2/\beta} \qquad .....(2)$$

اما دالة المعولية R(t):

$$R(t)=Pr(T>t)=1-F(t)$$
$$=\int_{t}^{\infty} f(u;\alpha,\beta)\,du$$
$$=\int_{t}^{\infty} \frac{2(u-\alpha)}{\beta}\, e^{-(u-\alpha)^2/\beta}\, du$$

وبعد التكامل يكون الناتج:

$$R(t)=e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \qquad \alpha<t<\beta\ ;\ \beta>0 \qquad .....(3)$$

وطبقاً لذلك تكون دالة المخاطرة لهذا التوزيع والتي تمثل معدل الفشل h(t) ويكون متغير مع الزمن هو:

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{2(t-\alpha)}{\beta} \qquad .....(4)$$

ولكي نقدر دالة المعولية، هناك العديد من الطرائق التقليدية منها الامكان الاعظم والعزوم، وهذه الطرائق لها صفات احصائية مختلفة ولكنها بالمقابل تهمل المعلومات الاولية المتوفرة حول المعلمات المطلوب تقديرها، لذلك تم اشتقاق مقدرات لتقدير دالة المعولية بتوظيف معلومات جيفري، ولصعوبة الحصول على التوزيع النظري الخاص بالمقدرات هذه، سيتم اجراء المقارنة بواسطة المحاكاة للتوصل الى افضل تقدير لدالة المعولية لهذا التوزيع واعتماد المعيار الاحصائي المعروف بمتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE للمقارنة، وفيما يلي شرح لطرائق التقدير الاربعة:

طرائق تقدير معلمة القياس β:

اولاً: طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method (MLM)

تهدف هذه الطريقة الى جعل دالة الامكان في نهايتها العظمى، فاذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ تتبع التوزيع في المعادلة (١)، فان دالة الامكان الاعظم هي:

$$L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(t_i;\alpha,\beta) \qquad .....(5)$$
$$=2^n\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\, e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(t_i-\alpha)^2}{\beta}}$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (٥):

$$LnL = nLn(2) - nLn(\beta) + \sum_{i=1}^{n} Ln(t_i - \alpha) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \alpha)^2}{\beta} \quad .....(6)$$

$$t_i > \alpha \; ; i = 1,2,...,n$$

وباشتقاق المعادلة (٦) بالنسبة الى β ومساواة المشتقة مع الصفر، نحصل على:

$$\frac{\partial LnL}{\partial \beta} = \frac{-n}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \alpha)^2}{\beta^2} = 0$$

ومنها نجد ان مقدر الامكان الاعظم $\hat{\beta}_{ML}$ هو :

$$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \alpha)^2}{n} \quad .....(7)$$

وطبقا لخاصية الثبات التي تتمتع بها مقدرات الامكان الاعظم، فان مقدر دالة المعولية حسب طريقة الامكان الاعظم سيكون:

$$\hat{R}_{ML}(t) = e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\beta}_{ML}}} \quad .....(8)$$

ثانياً: طريقة العزوم Method of Moments

تتميز طريقة العزوم بسهولتها وهي تعتمد على فرضية مساواة عزوم المجتمع μ_r مع عزوم العينة m_r، حيث ان:

$$\mu_r = E(t^r)$$

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^r}{n} \quad .....(9)$$

ومن ثم حل المعادلات الناتجة.

وطالما ان العزم الاول لتوزيع رايلي هو:

$$\mu_1 = E(t) = \frac{\sqrt{\pi\beta}}{2} + \alpha$$

وان:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \bar{t}$$

$$\mu_1 = m_1$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi\hat{\beta}}}{2} + \alpha = \bar{t}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\pi\hat{\beta}}}{2} = \bar{t} - \alpha$$
$$\Rightarrow \sqrt{\pi\hat{\beta}} = 2(\bar{t} - \alpha)$$

والتي تبسط الى:

$$\hat{\beta}_{MOM} = \frac{4}{\pi}(\bar{t} - \alpha)^2 \quad .....(10)$$

وطبقاً لذلك يكون مقدر المعولية حسب طريقة العزوم هو:

$$\hat{R}_{MOM}(t) = e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\beta}_{MOM}}} \quad .....(11)$$

ثالثاً: مقدر بيز بالاعتماد على معلومات Jeffrey الاولية[2]

اذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1, t_2, ..., t_n)$ من توزيع رايلي المعرف بالمعادلة (١)، بمعلمة ازاحة α ومعلمة قياس β، فان معلومات جيفري الاولية عن المعلمة يتم حسابها من العلاقة:

$$g(\beta) = k\sqrt{I(\beta)} \quad .....(12)$$

ويمثل المقدار $I(\beta)$ معلومات فيشر Fisher information، ويساوي:

$$I(\beta) = -E\left(\frac{\partial^2 Log(L)}{\partial \beta^2}\right)$$

واذا اعتبرنا ان المعلومات الاولية عن β هي:

$$g(\beta) = k\frac{\sqrt{n}}{\beta} \quad .....(13)$$

فان التوزيع اللاحق $h(\beta/t)$ سيكون:

$$h(\beta/t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{L(t_1, t_2, ..., t_n; \alpha, \beta)\ g(\beta)}{\int_0^\infty L(t_1, t_2, ..., t_n; \alpha, \beta)\ g(\beta)\ d\beta} \quad .....(14)$$

وبالنسبة للمقدار في مقام المعادلة (١٤) فهو:

$$\int_0^\infty L(t_1,t_2,...,t_n;\alpha,\beta)g(\beta)d\beta = \int_0^\infty \frac{2^n}{\beta^n}\prod_{i=1}^n (t_i-\alpha)e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2}{\beta}} \frac{k\sqrt{n}}{\beta}d\beta$$

$$=2^n k\sqrt{n}\prod_{i=1}^n (t_i-\alpha)\int_0^\infty \beta^{-(n+1)} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2}{\beta}} d\beta$$

وبعد تطبيق التكامل حسب قاعدة كـاما نجد ان ناتج التكامل هو:

$$=2^n k\sqrt{n}\prod_{i=1}^n (t_i-\alpha)\frac{\Gamma(n)}{\left[\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2\right]^n} \qquad .....(15)$$

وطبقاً لذلك تكون الدالة الاحتمالية الشرطية اللاحقة للمعلمة β بوجود بيانات العينة ($t_1, t_2, ..., t_n$) هي:

$$h(\beta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{\left[\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2\right]^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+1}\Gamma(n)} \qquad \beta>1 \qquad .....(16)$$

وفي حالة دالة الخسارة التربيعية يكون مقدر بيز للمعلمة β هو توقع التوزيع اللاحق:

$$\hat{\beta}_{Bayes} = E(B\backslash t)=\int_0^\infty \frac{\left[\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2\right]^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+1}\Gamma(n)}d\beta$$

$$\therefore \hat{\beta}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i-\alpha)^2}{n-1} \qquad .....(17)$$

ويمكننا استخدام نفس دالة الخسارة لايجاد مقدر بيز لدالة المعولية ومتوسط التوزيع اللاحق سيكون هو ايضاً التوقع لدالة المعولية بالنسبة الى التوزيع اللاحق كما يلي:

$$\hat{R}_{Bayes}(t)=E_{post}\,R(t)=\int_0^\infty e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}}\,\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2\right]^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\beta}}}{\beta^{n+1}\Gamma(n)}\,d\beta$$

$$\therefore \hat{R}_{Bayes}(t)=\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2+(t-\alpha)^2}\right]^n \qquad \ldots..(18)$$

رابعاً: طريقة بيز المعتمدة على المعلومات الاولية المحورة:

ان طريقة بيز المحورة تعتمد على استخدام المعلومات الاولية التي تاخذ الصيغة التالية:

$$g(\beta)=\frac{k}{\sqrt{\beta^5}} \qquad \ldots..(19)$$

حيث kثابت.

واذا كانت $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ عينة عشوائية من الدالة الممثلة بالمعادلة (١)، فان التوزيع اللاحق بالاعتماد على معلومات جيفري الأولية المحورة يتم الحصول عليه بتطبيق صيغة بيز التالية:

$$g(\beta/t_1,t_2,\ldots,t_n)=\frac{L(t_1,t_2,\ldots,t_n;\alpha,\beta)\;g(\beta)}{\int_0^\infty L(t_1,t_2,\ldots,t_n;\alpha,\beta)\;g(\beta)\;d\beta} \qquad \ldots..(20)$$

وان تكامل المقام هو:

$$\int_0^\infty L(t_1,t_2,\ldots,t_n;\alpha,\beta)g(\beta)d\beta=\int_0^\infty \frac{2^n}{\beta^n}\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)e^{-\frac{T}{\beta}}\frac{k}{\sqrt{\beta^5}}\,d\beta$$

$$=2^n k\prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\int_0^\infty \frac{1}{\beta^{n+\frac{5}{2}}}e^{-\frac{T}{\beta}}\,d\beta$$

حيث $T=\sum_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)^2$.

وبافتراض ان:

$$y=\frac{T}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta=\frac{T}{y}$$

$$d\beta=-\frac{T}{y^2}dy \qquad .....(21)$$

وبعد تطبيق هذا التحويل واجراء التكامل، نجد ان:

$$2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\int_0^{\infty}\left(\frac{T}{y}\right)^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)} e^{-y}\frac{T}{y^2}\,dy$$

$$=2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\int_0^{\infty} y^{n+\frac{5}{2}-2} e^{-y}\,dy$$

$$=2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\int_0^{\infty} y^{\left(n+\frac{3}{2}\right)-1} e^{-y}\,dy$$

$$=2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)$$

وبالتالي يكون التوزيع اللاحق لمعلمة القياس β بوجود العينة $(t_1,t_2,...,t_n)$ هو:

$$g(\beta/t)=\frac{\dfrac{2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)}{\beta^{n+\frac{5}{2}}}e^{-\frac{T}{\beta}}}{2^n k \prod_{i=1}^{n}(t_i-\alpha)\,T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\beta^{n+\frac{5}{2}}}e^{-\frac{T}{\beta}}}{T^{-\left(n+\frac{5}{2}\right)+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\therefore g(\beta/t)=\frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\beta^{n+\frac{5}{2}}}\,e^{-\frac{T}{\beta}} \qquad \text{.....(22)}$$

وبالاعتماد على دالة الخسارة التربيعية، يكون مقدر بيز بالاعتماد على التعريف الجديد لتوزيع المعلمة β، والذي سنرمز له $\hat{\beta}_{bm}$ هو متوسط التوزيع اللاحق $\mathrm{E}(\beta/t)$ ويساوي:

$$\hat{\beta}_{bm}=\mathrm{E}(\beta/t)=\int_0^{\infty}\beta\,g(\beta/t)\,d\beta$$

$$=\frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}\beta\,\frac{1}{\beta^{n+\frac{5}{2}}}e^{-\frac{T}{\beta}}\,d\beta$$

$$=\frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}\frac{1}{\beta^{n+\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{T}{\beta}}\,d\beta$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}\left(\frac{T}{\beta}\right)^{n+\frac{3}{2}}e^{-\frac{T}{\beta}}\,d\beta$$

وبافتراض ان:

$$y=\frac{T}{\beta}\ \Rightarrow\ \beta=\frac{T}{y}$$

$$d\beta=-\frac{T}{y^2}dy \qquad \text{.....(23)}$$

$$\hat{\beta}_{bm2}=\frac{1}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}y^{n+\frac{3}{2}}\,e^{-y}\,\frac{T}{y^2}dy$$

$$=\frac{T}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\int_0^{\infty}y^{n-\frac{1}{2}}\,e^{-y}\,dy$$

$$=\frac{T}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \hat{\beta}_{bm2} = \frac{T\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} \qquad .....(24)$$

ان مقدر بيز لدالة المعولية سيكون ايضاً التوقع لدالة المعولية بالاعتماد على التوزيع اللاحق وكما يلي:

$$\hat{R}(t)_{bm} = \mathrm{E}_{post}\, R(t)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\beta}} \frac{T^{n+\frac{3}{2}}}{\beta^{n+\frac{5}{2}}\,\Gamma(n+\frac{3}{2})} e^{-\frac{T}{\beta}} d\beta$$

$$= \left[\frac{T}{T+(t-\alpha)^2}\right]^{n+1.5} \qquad .....(25)$$

خامساً: <u>المقدر المقترح لمعلمة القياس</u> β

ويمثل خليط من مقدري الامكان الاعظم ومقدر بيز، ولنرمز لمقدر المعلمة β حسب طريقة الامكان الاعظم (المعرف بالمعادلة ٧) بالرمز:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_{MLE}$$

والمقدر الثاني هو مقدر بيز (المعرف بالمعادلة ١٧) هو:

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_{Bayes}$$

فان المقدر $\hat{\beta}_{Mix}$ يمثل خليط من المقدرين وحسب ما يلي:

$$\hat{\beta}_{Mix} = p\,\hat{\beta}_1 + (1-p)\,\hat{\beta}_2 \qquad .....(26)$$

ولايجاد قيمة p التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر المقترح اقل ما يمكن، نطبق الخطوات التالية:

$$\hat{\beta}_{Mix} - \beta = p\,\hat{\beta}_1 + (1-p)\,\hat{\beta}_2 - \beta$$

$$\hat{\beta}_{Mix} - \beta = p(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) + (\hat{\beta}_2 - \beta)$$

$$\hat{\beta}_{Mix} - \beta = p[(\hat{\beta}_1 - \beta) - (\hat{\beta}_2 - \beta)] + (\hat{\beta}_2 - \beta)$$

وبالتربيع نحصل على:

$$(\hat{\beta}_{Mix}-\beta)^2 = p^2[(\hat{\beta}_1-\beta)^2-2(\hat{\beta}_1-\beta)(\hat{\beta}_2-\beta)]+(\hat{\beta}_2-\beta)^2]$$
$$+2p(\hat{\beta}_2-\beta)[(\hat{\beta}_1-\beta)-(\hat{\beta}_2-\beta)]+(\hat{\beta}_2-\beta)^2$$

وبأخذ التوقع للطرفين نحصل على:

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}_{Mix}-\beta)^2 = p^2\,\mathrm{E}(\hat{\beta}_1-\beta)^2-2p^2\mathrm{E}(\hat{\beta}_1-\beta)(\hat{\beta}_2-\beta)+p^2\mathrm{E}(\hat{\beta}_2-\beta)^2$$
$$+2p\mathrm{E}(\hat{\beta}_2-\beta)(\hat{\beta}_1-\beta)-2p\mathrm{E}(\hat{\beta}_2-\beta)^2+\mathrm{E}(\hat{\beta}_2-\beta)^2$$

$$MSE(\hat{\beta}_{Mix}) = p^2\,MSE(\hat{\beta}_1)-2p^2\mathrm{E}(\hat{\beta}_1-\beta)(\hat{\beta}_2-\beta)+p^2MSE(\hat{\beta}_2) \quad .....(27)$$
$$+2p\mathrm{E}(\hat{\beta}_2-\beta)(\hat{\beta}_1-\beta)-2pMSE(\hat{\beta}_2)+MSE(\hat{\beta}_2)$$

ثم نشتق المعادلة (٢٧) بالنسبة الى P:

$$\frac{\partial MSE}{\partial P} = 2p\,MSE(\hat{\beta}_1)-4p\mathrm{E}(\hat{\beta}_1-\beta)(\hat{\beta}_2-\beta)+2pMSE(\hat{\beta}_2)$$
$$+2\mathrm{E}(\hat{\beta}_2-\beta)(\hat{\beta}_1-\beta)-2MSE(\hat{\beta}_2)$$

ونساوي المشتقة مع الصفر لنحصل على قيمة P:

$$\therefore\quad P = \frac{MSE(\hat{\beta}_2)-\mathrm{E}(\hat{\beta}_1-\beta)(\hat{\beta}_2-\beta)}{MSE(\hat{\beta}_1)-2\mathrm{E}(\hat{\beta}_1-\beta)(\hat{\beta}_2-\beta)+MSE(\hat{\beta}_2)} \quad .....(28)$$

وهكذا بعد ايجاد المقدرين للمعلمة β من المعادلتين (٧) و (١٧) وحسب برنامج المحاكاة الذي سيعد لهذا الهدف، يمكننا استخراج قيمة P من المعادلة (٢٨)، ثم اعتمادها في ايجاد مقدر مختلط من المعادلة (٢٦)، ومن ثم بالامكان تعويضه في دالة المعولية لتحديد مقدرها، حيث ان مقدر المعولية حسب هذه الطريقة سيكون:

$$\hat{R}_{Mix}(t) = e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{\hat{\beta}_{Mix}}} \quad .....(29)$$

الجانب التجريبي

لغرض المقارنة بين المقدرات الخمسة لمعلمة القياس β اعتمدت المحاكاة، حيث تم توليد البيانات من التوزيع المنتظم وتحويلها الى بيانات تتبع توزيع رايلي ذي المعلمين وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل العكسية التالية:

$$F(t,\alpha,\beta)=1-e^{-(t-\alpha)^2/\beta}$$

$$U=1-e^{-(t-\alpha)^2/\beta}$$

$$e^{-(t-\alpha)^2/\beta}=1-U$$

وبعد اجراء بعض التبسيطات، نحصل على:

$$\frac{-(t-\alpha)^2}{\beta}=Ln(1-U)$$

$$(t-\alpha)^2=-\beta\,Ln(1-U)$$

$$\therefore\ t=\alpha+\sqrt{-\beta\,Ln(1-U)} \qquad .....(30)$$

وتستخدم المعادلة(٣٠) في توليد البيانات لحجوم عينات مختلفة وقيم مفترضة للمعلمة ($\alpha=0.5,1,1.5$) والمعلمة ($\beta=0.5,1,1.5$). وتستخرج المقدرات للمعلمة β من تطبيق المعادلات (٧، ١٠، ١٧، ٢٤، ٢٦)، ويعتمد المقياس متوسط مربعات الخطأ التكاملي Integrated Mean Squared Error (IMSE) الآتي:

$$IMSE=\frac{\sum_{i=1}^{L} MSE(\hat{\beta})}{L} \qquad .....(31)$$

حيث L عدد مرات تكرار التجربة. وللحصول على المقدر الذي يمتلك اصغر $IMSE$، ومن ثم تعتمد هذه المعلمة في تقدير دالة المعولية. ولتنفيذ تجارب المحاكاة على قيم t_i المولدة من المعادلة (٣٠)، اخذت حجوم عينات صغيرة ومتوسطة وكبيرة هي:

(n=10, 20, 25, 30, 40, 50, 100, 200)

وكررت كل تجربة (R=1000). واعطيت قيمة افتراضية لكل من (α, β)، والجداول التالية تلخص نتائج المحاكاة.

جدول (1) يوضح تقديرات معلمة القياس $\hat{\beta}$

n	β	α	$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Mom}$	$\hat{\beta}_{Bay}$	$\hat{\beta}_{bm}$	$\hat{\beta}_{mixed}$
10	0.5	0.5	0.5004000	0.5159300	0.5560000	0.4765700	0.4530900
		1.0	0.5083400	0.5227400	0.5648300	0.4841400	0.4537400
		1.5	0.5041900	0.5149900	0.5602100	0.4801800	0.4562100
	1.0	0.5	1.0089000	1.0406100	1.1210000	0.9608600	0.9028600
		1.0	1.0090600	1.0437500	1.1211800	0.9610100	0.9156700
		1.5	0.9995500	1.0247600	1.1106100	0.9519500	0.9060200
	1.5	0.5	1.4532900	1.4765700	1.6147700	1.3840900	1.3546000
		1.0	1.4865400	1.5216200	1.6517200	1.4157600	1.3715400
		1.5	1.4692000	1.5078300	1.6324400	1.3992300	1.3600900
25	0.5	0.5	0.5037900	0.5075000	0.5247900	0.4939200	0.4828300
		1.0	0.5003700	0.5060900	0.5212200	0.4905600	0.4810300
		1.5	0.5061700	0.5128400	0.5272600	0.4962500	0.4794700
	1.0	0.5	0.9987500	1.0123200	1.0403700	0.9791700	0.9629200
		1.0	0.9990800	1.0089600	1.0407100	0.9794900	0.9592800
		1.5	1.0057500	1.0128300	1.0476500	0.9860300	0.9610000
	1.5	0.5	1.4828700	1.4925700	1.5446500	1.4537900	1.4407900
		1.0	1.5113700	1.5283300	1.5743400	1.4817400	1.4408000
		1.5	1.5048400	1.5280100	1.5675500	1.4753400	1.4424500
50	0.5	0.5	0.4977600	0.5008500	0.5079100	0.4928300	0.4908800
		1.0	0.4958200	0.4986600	0.5059400	0.4909100	0.4907300
		1.5	0.5014800	0.5044000	0.5117200	0.4965200	0.4902000
	1.0	0.5	0.9958600	0.9993600	1.0161800	0.9860000	0.9818700
		1.0	0.9985200	1.0052000	1.0189000	0.9886300	0.9813500
		1.5	1.0000500	1.0045300	1.0204600	0.9901500	0.9802800
	1.5	0.5	1.4961800	1.5022200	1.5267200	1.4813700	1.4702300
		1.0	1.5075700	1.5200500	1.5383300	1.4926400	1.4701500
		1.5	1.4958900	1.4968900	1.5264200	1.4810800	1.4694600
100	0.5	0.5	0.4996400	0.5015100	0.5046800	0.4971500	0.4949100
		1.0	0.4998700	0.5019300	0.5049200	0.4973900	0.4952100
		1.5	0.4941700	0.4942900	0.4991600	0.4917100	0.4948900
	1.0	0.5	0.9981000	1.0013800	1.0081800	0.9931300	0.9899400
		1.0	0.9904900	0.9895100	1.0005000	0.9855700	0.9897800
		1.5	1.0013100	1.0051800	1.0114200	0.9963300	0.9913500
	1.5	0.5	1.5195100	1.5235200	1.5348600	1.5119500	1.4846600
		1.0	1.5019900	1.5083200	1.5171600	1.4945200	1.4828400
		1.5	1.5037200	1.5053700	1.5189100	1.4962400	1.4847500

جدول (2) يوضح متوسط مربعات الخطأ التكاملي لتقديرات معلمة القياس $\hat{\beta}$

n	β	α	IMSE_B				
			$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Mom}$	$\hat{\beta}_{Bay}$	$\hat{\beta}_{bm}$	$\hat{\beta}_{mixed}$
10	0.5	0.5	0.0025927	0.0031709	0.0035144	0.0024065	0.0023456
		1.0	0.0026414	0.0031117	0.0036727	0.0024147	0.0023129
		1.5	0.0024415	0.0027744	0.0033746	0.0022522	0.0021893
	1.0	0.5	0.0109595	0.0127475	0.0149846	0.0100866	0.0097140
		1.0	0.0093857	0.0114036	0.0130457	0.0086577	0.0084332
		1.5	0.0103636	0.0116488	0.0140180	0.0096309	0.0093980
	1.5	0.5	0.0228882	0.0256480	0.0293048	0.0219059	0.0218097
		1.0	0.0207159	0.0227044	0.0278546	0.0194832	0.0192694
		1.5	0.0222990	0.0269018	0.0291665	0.0211552	0.0209862
25	0.5	0.5	0.0003617	0.0004215	0.0004164	0.0003486	0.0003435
		1.0	0.0003950	0.0004501	0.0004466	0.0003832	0.0003795
		1.5	0.0004403	0.0004977	0.0005058	0.0004223	0.0004105
	1.0	0.5	0.0015364	0.0017874	0.0017322	0.0014941	0.0014831
		1.0	0.0016950	0.0017777	0.0019054	0.0016459	0.0016289
		1.5	0.0016433	0.0018714	0.0018725	0.0015860	0.0015600
	1.5	0.5	0.0036267	0.0040158	0.0040022	0.0035600	0.0035530
		1.0	0.0037594	0.0042103	0.0042947	0.0036218	0.0035520
		1.5	0.0036153	0.0039601	0.0041043	0.0034983	0.0034533
50	0.5	0.5	0.0000922	0.0001035	0.0000971	0.0000913	0.0000912
		1.0	0.0000933	0.0001046	0.0000974	0.0000927	0.0000927
		1.5	0.0001006	0.0001134	0.0001074	0.0000988	0.0000980
	1.0	0.5	0.0003667	0.0004103	0.0003867	0.0003631	0.0003627
		1.0	0.0003791	0.0004156	0.0004018	0.0003742	0.0003731
		1.5	0.0004024	0.0004385	0.0004274	0.0003964	0.0003944
	1.5	0.5	0.0009067	0.0009922	0.0009581	0.0008955	0.0008930
		1.0	0.0009242	0.0010442	0.0009905	0.0009059	0.0008956
		1.5	0.0009305	0.0009754	0.0009824	0.0009190	0.0009162
100	0.5	0.5	0.0000257	0.0000280	0.0000264	0.0000255	0.0000255
		1.0	0.0000242	0.0000268	0.0000249	0.0000240	0.0000239
		1.5	0.0000256	0.0000284	0.0000257	0.0000257	0.0000256
	1.0	0.5	0.0001013	0.0001120	0.0001039	0.0001007	0.0001006
		1.0	0.0001022	0.0001100	0.0001034	0.0001024	0.0001022
		1.5	0.0000875	0.0000971	0.0000905	0.0000867	0.0000865
	1.5	0.5	0.0002424	0.0002576	0.0002556	0.0002376	0.0002301
		1.0	0.0002611	0.0002834	0.0002693	0.0002587	0.0002574
		1.5	0.0002324	0.0002579	0.0002405	0.0002301	0.0002288

جدول (3) يوضح تقديرات دالة المعولية لمعلمة القياس $\hat{\beta}$

n	β	α	Reliability				
			$\hat{\beta}_{ML}$	$\hat{\beta}_{Mom}$	$\hat{\beta}_{Bay}$	$\hat{\beta}_{bm}$	$\hat{\beta}_{mixed}$
10	0.5	0.5	0.5832300	0.5895800	0.5918100	0.5484300	0.5759300
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.5873100	0.5916800	0.5957200	0.5524600	0.5781100
	1.0	0.5	0.7611200	0.7655800	0.7641500	0.7344900	0.7581300
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7606200	0.7641600	0.7636300	0.7338600	0.7588600
	1.5	0.5	0.8268800	0.8283000	0.8285000	0.8057500	0.8314700
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8283600	0.8304400	0.8299600	0.8073900	0.8320900
25	0.5	0.5	0.6006000	0.6018400	0.6037400	0.5859100	0.5958400
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.6006400	0.6038000	0.6037900	0.5859900	0.5936900
	1.0	0.5	0.7718700	0.7736800	0.7729300	0.7611400	0.7713400
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7732000	0.7737900	0.7742400	0.7625100	0.7709400
	1.5	0.5	0.8393800	0.8398500	0.8399100	0.8312000	0.8407000
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8416600	0.8435200	0.8421800	0.8335800	0.8408700
50	0.5	0.5	0.6009200	0.6023600	0.6024800	0.5934400	0.6009200
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.6029300	0.6042000	0.6044800	0.5954600	0.6005000
	1.0	0.5	0.7749000	0.7752300	0.7754100	0.7695300	0.7752100
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7753900	0.7759700	0.7758900	0.7700200	0.7748900
	1.5	0.5	0.8435400	0.8439100	0.8437900	0.8395100	0.8436300
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8433600	0.8433100	0.8436100	0.8393300	0.8435500
100	0.5	0.5	0.6039700	0.6049200	0.6047400	0.6002000	0.6034200
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.6005900	0.6004100	0.6013800	0.5968200	0.6034100
	1.0	0.5	0.7767000	0.7771700	0.7769500	0.7740200	0.7768300
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.7775500	0.7781500	0.7778000	0.7748700	0.7771000
	1.5	0.5	0.8469500	0.8472400	0.8470700	0.8449600	0.8450300
		1.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
		1.5	0.8455100	0.8455000	0.8456300	0.8435000	0.8450300

الجانب التطبيقي

البيانات التالية تمثل أوقات الأشتغال لحين الفشل (بالأشهر) لخمسين جهاز من أجهزة الحماية التي تقوم الشركة العامة للصناعات الألكترونية بأنتاجها، وهذه الأجهزة ضرورية في جميع المستويات وقد تم تبويبها في جدول تكراري وطبق أختبار حسن المطابقة وقد ظهر لنا أن توزيع البيانات هو توزيع رايلي ذي المعلمتين، معلمة القياس ومعلمة الأزاحة، اي أن الفشل يحصل بعد مرور مدة معينة، وبعد التأكد من التوزيع عملنا على تقدير معلمة القياس بأعتبار أن معلمة الأزاحة معلومة بعدة طرائق هي الأمكان الأعظم والعزوم ومقدر بيزي يعتمد على المعلومات الأصلية المحورة، ومقدر بيز الأعتيادي ومقدر خليط مقترح، تم الحصول عليه من مزج مقدري الأمكان الأعظم ومقدر بيز ونفذت تجارب محاكاة (n=10,25,50,100)وكررت كل تجربة (R=100) وقورنت النتائج بواسطة (IMSE). بعد التقدير سيتم حساب متوسط وقت الأشتغال لحين الفشل وهو مؤشر مهم جداً لمعرفة توقيتات الصيانة ، وقد قدرت المعولية أيضاً وهي من المؤشرات المهمة جداً لحساب احتمال بقاء الجهاز صالح للعمل بعد مرور الزمن (t).

الجدول التالي يمثل بيانات أوقات الأشتغال لحين الفشل لأجهزة الحماية الألكترونية.

جدول (4) بيانات أوقات الأشتغال لحين الفشل لأجهزة الحماية الألكترونية.

2.368	2.0247	1.893	1.788	1.906	2.37
2.2499	1.5580	3.450324	3.33823	4.400	3.3688
3.108	3.31103	1.7563	1.84087	1.8344	4.4
4.338	4.5906	2.8214	2.31708	2.914	2.76779
2.41098	2.343069	5.324	3.678	4.706	3.892
6.067	6.008	1.8562	1.6342	1.826	3.3113
3.0746	3.43157	1.5323	1.93418	2.9414	2.9128
2.4263	2.9893	3.3763	0.9	0.98	0.95

وتم تبويب البيانات في جدول تكراري واستخرجت الأحتمالات لكل خلية والتكرارت المتوقعة وحسب صيغة إحصاءة اختبار مربع كاي.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

t_i= Min = 0.9

t_i=Max = 6.067

range = $t_{max} - t_{min}$ +1

= 6.067 – 0.9 +1 = 6.167

Number of classes = 7

Length of class = 0.881

Classes	f_i	Cell prob.	E_i	$(O_i - E_i)^2/E_i$
0.9 - 1.8	8	0.1646	8.230	0.006427
1.8 – 2.7	16	0.3112	15.56	0.0124422
2.7 - 3.6	14	0.2782	13.91	0.0005823
3.6 - 4.5	5	0.1300	6.5	0.346154
4.5 – 5.4	4	0.0642	3.2	0.20000
5.4 – 6.3	2	0.034	1.7	0.052941
6.3 – 7.2	1	0.018	0.9	0.011111
Total	50	1.0000	50	0.6296573

يتم اختبار الفرضيتين التاليتين:

H_0 : Data is assumed Raylieh (two parameters)
H_1 : Data is is not distributedRaylieh (two parameters)

تتم مقارنة قيمة مربع كاي المحسوبة مع الجدولية حيث أن المحسوبة كانت (0.6296573) في حين كانت الجدولية (9.49). وبما أن المحسوبة أقل من الجدولية لذلك نقبل (H_0).

الاستنتاجات

يلاحظ من نتائج المحاكاة:

١- في الجانب النظري تمكن الباحث من ايجاد مقدر مقترح يمثل خليط من مقدري الامكان الاعظم ومقدر بيز.

٢- اعتبرت معلمة الازاحة هنا α ثابتة، لأنه في معظم التجارب الطبية والفيزيائية يتم البحث عن الوقت المستغرق لحين حصول الفشل بعد الزمن α $(t > \alpha)$.

٣- استندت النتائج على حجوم عينات مختلفة جداً (n=10, 20, 25, 40, 50, 100)، وفي جميعها اثبتت الطريقة المقترحة ان متوسط مربعات الخطأ لمقدر β المقترح هو الاصغر من بين متوسطات كل الطرائق الأخرى، مما يؤكد تفوق هذه الطريقة.

٤- وجد أن متوسط وقت الأشتغال لحين الفشل لجهاز الحماية يساوي (3.24) شهر وهو متوسط جيد يساعد الشركة في أتخاذ التدابير اللازمة للصيانة ومراقبة المنتوج قبل الفشل.

التوصيات

نوصي باعتماد الطريقة المقترحة ومن ثم طريقة البيز في تقدير دالة المعولية.

References

1. *Abu-Taleb A. A., Smadi, M. M. and Alwaneh, A. J., (2007). "Bayes Estimation of the Life Time Parameters for the Exponential Distribution"; J. Math. Statist. 3(3), 106-108.*
2. *Baklizi, A. (2003). "Acceptance Sampling Based on Truncated Life Tests in the Pareto Distribution of the Second Kind"; Advances and Applications in Statistics, (3) (1), 33-48.*
3. *Dey, S. & Das, M. K., (2007), "A Note on Prediction Interval for a Rayleigh Distribution: Bayesian Approach"; American Journal of Mathematical and Management Science 27 (1&2), 43-48. Kundu, D. & Raqab, M. Z. (2005). "Generalized Rayleigh Distribution Different Methods of Estimation"; Computational Statistics and Data Analysis, 49, 187-200.*
4. *Johnson, V. E. and D. Rossell, (2010), "On the Use of Non-Local Prior Densities in Bayesian Hypothesis Tests"; J. R. Statist. Soc. B., 72: 143-170.*
5. *Muhammad Saleem and Muhammad Aslam, (2009); "On Bayesian Analysis of the Rayleigh Survival Time Assuming the Random Censor Time"; Pak. J. Statist. 2009, Vol. 25(2), 71-82.*
6. *Rao, G. S., (2009), "Reliability Test Plans for Marshall-Olki Extended Exponential Distribution"; App. Math. Science, 55(3), 2745-2755.*
7. *Sanku Dey (2008), "Minimax Estimation of the Parameter of the Rayleigh Distribution under Quadratic Loss Function"; Data Science Journal, Vol. 7, 23 February 2008.*
8. *Serge B. Provost, Abdus Saboor and Munir Ahmad, (2011); "The Gamma – Weibull Distribution"; Pak. J. Statist. 2011, Vol. 27(2), 111-131.*